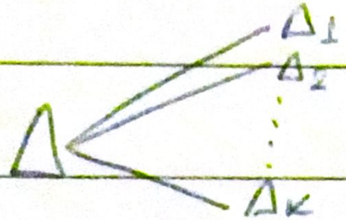
11/10/19

Πολλαπλασιαστικός κανόνας ή αρχή της σα



Έστω Δ μία σύνθετη διαδικασία. Η Δ πραγματοποιείται εάν πραγματοποιηθούν Δκ απλούστερες.

Η Δ πραγματοποιείται με $n = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots n_\kappa$ τρόπους.

Άσκηση:

Ένα ζάρι ρίχνεται n-φορές. Πόσα είναι τα δυνατά αποτελέσματα;

Λύση:

$$\left.\begin{array}{l} 1^{\eta} \text{ ρίψη} \rightarrow n_1 = 6 \\ 2^{\eta} \text{ ρίψη} \rightarrow n_2 = 6 \\ \vdots \\ n\text{-οστή ρίψη} \rightarrow n_n = 6 \end{array}\right\} \Longrightarrow 6^n \text{ δυνατά αποτελέσματα}$$

ή αλλιώς:

$\underset{6}{\overset{\uparrow}{\_\_}}\ \underset{6}{\overset{\uparrow}{\_\_}}\ \dots\ \underset{6}{\overset{\uparrow}{\_\_}}$

Άρα, 6^n

Άσκηση:

Δύο ζάρια ρίχνονται n-φορές. Πόσα είναι τα δυνατά αποτελέσματα;

Λύση:

Ζάρι 1 \ Ζάρι 2	1	2	...	6
1	(1,1)	(1,2)	...	(1,6)
2	⋮	⋮		⋮
⋮				
6	(6,1)	(6,2)	...	(6,6)

Άρα, 36 δυνατά αποτελέσματα σε κάθε ρίψη.

Οπότε,

1η ρίψη → 36

2η ρίψη → 36

⋮

n-οστή ρίψη → 36

Επομένως, 36^n δυνατά αποτελέσματα.

Μετάθεση n διακεκριμένων (=διαφορετικών) στοιχείων λέγεται λέγεται κάθε δυνατή τοποθέτησή τους σε γραμμή σε σειρά με συγκεκριμένη τάξη.

Παράδειγμα:
Έστω Α, Β, Γ. Βρείτε τις μεταθέσεις τους.
Λύση:
ΑΒΓ, ΑΓΒ, ΒΑΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ, ΓΒΑ

• **Διάταξη** n διακεκριμένων στοιχείων ανά κ $(n, \kappa \in \mathbb{N}, 1 \leq \kappa \leq n)$ λέγεται κάθε δυνατή τοποθέτηση των κ από τα n στοιχεία σε γραμμή σε σειρά.

Διάταξη → Επιλογή κ από n
Διάταξη → Μετάθεση των κ

Παράδειγμα:
Έστω Α, Β, Γ. Βρείτε τις διατάξεις τους ανά δύο (3 ανά 2)
Λύση:
ΑΒ, ΒΑ, ΑΓ, ΓΑ, ΒΓ, ΓΒ

Παρατήρηση: Αν $\kappa = n$, η έννοια της n ανά n διάταξης ταυτίζεται με την έννοια της μετάθεσης.

• **Συνδυασμός** n διακεκριμένων στοιχείων ανά κ λέγεται κάθε δυνατή επιλογή κ από τα n στοιχεία χωρίς να ενδιαφερόμαστε για κάποια τοποθέτηση σε σειρά κ-στοιχείων.

Παράδειγμα:
Να βρείτε τους 3 ανά 2 συνδυασμούς των Α, Β, Γ.

Λύση:

ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ

- Παρατήρηση: Η διάταξη αναφέρεται σε μια πιο σύνθετη κατάσταση που επιμερίζεται σε συνδυασμό και σε μετάθεση.

Διάταξη $\equiv$ Συνδυασμός + Μετάθεση

• Πρόταση:

i) Το πλήθος των διατάξεων n ανά κ ($\kappa, n \in \mathbb{N}$, $1 \leq \kappa \leq n$) συμβολίζεται με $(n)_\kappa$ και είναι $(n)_\kappa = \frac{n!}{(n-\kappa)!}$.

ii) Το πλήθος των μεταθέσεων n στοιχείων είναι $n!$.

iii) Το πλήθος των συνδυασμών n ανά κ ($n, \kappa \in \mathbb{N}$, $1 \leq \kappa \leq n$) συμβολίζεται με $\binom{n}{\kappa}$ και είναι $\binom{n}{\kappa} = \frac{n!}{\kappa!(n-\kappa)!}$.

Άρα, $(n)_\kappa = \binom{n}{\kappa} \cdot \kappa!$

Άσκηση:

Με πόσους τρόπους 8 δρομείς μπορούν να τοποθετηθούν στην αφετηρία;

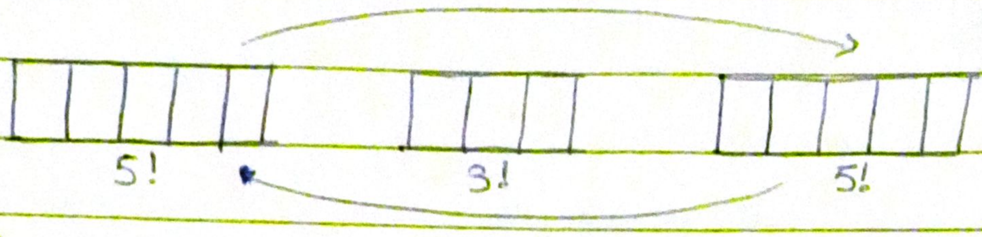
Λύση:

Απάντηση: 8!

Άσκηση:

Πόσες αναμνηστικές φωτογραφίες μπορούν να βγάλουν δύο ομάδες μπάσκετ και οι 3 διαιτητές αν οι διαιτητές παρεμβάλλονται μεταξύ των ομάδων;

Λύση:



Άρα $2\cdot 5!\cdot 3!\cdot 5!$

Άσκηση:

Πόσες τετραμελής επιτροπές μπορούν να σχηματιστούν από 5 άνδρες και 4 γυναίκες εάν πρέπει σε κάθε επιτροπή να συμμετέχουν δύο άντρες και δύο γυναίκες;

Λύση:

Δεν έχει νόημα η σειρά, οπότε παίρνω συνδυασμό και όχι διάταξη.

Επομένως από άντρες επιλέγω $\binom{5}{2}$ και από γυναίκες $\binom{4}{2}$

Άρα $\binom{5}{2}\cdot\binom{4}{2}$

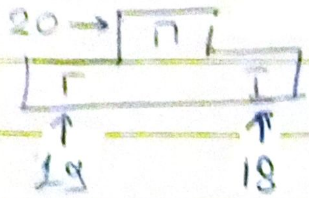
Άσκηση:

Με πόσους τρόπους μπορεί να συγκροτηθεί μια τριμελής επιτροπή που αποτελείται από πρόεδρο, γραμματέα, ταμεία αν υπάρχουν 20 υποψήφιοι;

Λύση:

Είναι $(20)_3 = \frac{20!}{(20-3)!} = \frac{20!}{17!}$

ή αλλιώς:



Άρα $20 \cdot 19 \cdot 18 = \frac{20!}{17!}$

Άσκηση:

Ένας φοιτητής πρέπει να απαντήσει σε 7 από 10 ερωτήσεις.
α) Πόσες επιλογές έχει; β) Πόσες επιλογές έχει αν πρέπει να απαντήσει σε τουλάχιστον τρεις από τις 5 πρώτες ερωτήσεις;

Λύση:

α)

Επειδή δεν μας ενδιαφέρει η σειρά με την οποία θα απαντήσει στις ερωτήσεις παίρνουμε συνδυασμό.

$$\binom{10}{7} = \frac{10!}{7!\,3!}$$

β)

$E_1 \quad E_2 \quad E_3 \quad E_4 \quad E_5$	$E_6 \quad E_7 \quad E_8 \quad E_9 \quad E_{10}$
τουλάχιστον 3	συμπληρώνει ώστε το σύνολο να είναι 7

3 από $E_1 - E_5$ και 4 από $E_6 - E_{10}$ $\Rightarrow \binom{5}{3} \cdot \binom{5}{4}$

ή 4 από $E_1 - E_5$ και 3 από $E_6 - E_{10}$ $\Rightarrow \binom{5}{4} \cdot \binom{5}{3}$

ή 5 από $E_1 - E_5$ και 2 από $E_6 - E_{10}$ $\Rightarrow \binom{5}{5} \cdot \binom{5}{2}$

Άρα $\binom{5}{3} \cdot \binom{5}{4} + \binom{5}{4} \cdot \binom{5}{3} + \binom{5}{5} \cdot \binom{5}{2}$

- **Παρατήρηση:** Διώνυμο Νεύτωνα: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot x^k\cdot y^{n-k}$

Πολυωνυμικός συντελεστής

Έστω 3 μπάλες μπιλιάρδου:

- Ένας τρόπος είναι με βάση την αρίθμηση: Μετάθεση → 3!
- Ένας άλλος τρόπος είναι με βάση το χρώμα:

1 2 3
2 1 3
3 2 1

• **Πρόταση:** Έστω n αντικείμενα από τα οποία τα k_1 είναι ομάδας/κατηγορίας 1, τα k_2 είναι κατηγορίας 2 ... τα k_r είναι κατηγορίας r με $k_1+k_2+\dots+k_r=n$. Το πλήθος των τρόπων με τους οποίους τα n-αντικείμενα τοποθετούνται σε σειρά σε γραμμή συμβολίζεται με $\binom{n}{k_1 k_2 \dots k_r}$ και είναι $\binom{n}{k_1 k_2 \dots k_r} = \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_r!}$.

Παρατηρήσεις:

i) Το σύμβολο $\binom{n}{k_1 k_2 \dots k_r}$ ονομάζεται πολυωνυμικός συντελεστής και εμφανίζεται στην γενίκευση του διωνύμου Νεύτωνα:

$$(x_1+\dots+x_r)^n = \sum_{k_1 k_2 \dots k_r\ k_1+k_2+\dots+k_r=n} \binom{n}{k_1 k_2 \dots k_r} x_1^{k_1}\cdot x_2^{k_2}\cdots x_r^{k_r}$$

ii) Αποδεικνύεται αλγεβρικά ότι ο πολυωνυμικός συντελεστής:

$$\binom{n}{k_1 k_2 \dots k_r} = \binom{n}{k_1} \cdot \binom{n-k_1}{k_2} \cdot \binom{n-k_1-k_2}{k_3} \cdot \dots \cdot \binom{n-k_1-\dots-k_{r-2}}{k_{r-1}} \cdot \binom{n-k_1-\dots-k_{r-1}}{k_r}$$

$$\frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_r!} \qquad \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!} \qquad \frac{(n-k_1)!}{k_2!(n-k_1-k_2)!}$$

Άσκηση:

Έστω 10 όμοιες μπάλες αριθμημένες από το 1 έως το 10. Από αυτές 3 είναι μαύρες, 2 είναι μπλε, 4 είναι κόκκινες και 1 είναι άσπρη. Με πόσους τρόπους μπορώ να τις βάλω σε σειρά;

Λύση:

Αν θεωρήσω τις μπάλες με βάση την αρίθμηση είναι 10!

Αν θεωρήσω τις μπάλες ως προς το χρώμα είναι:

$$\binom{10}{3\,2\,4\,1} = \frac{10!}{3!2!4!1!}$$

Άσκηση:

Πόσες διαφορετικές λέξεις κατασκευάζονται από την αντιμετάθεση των γραμμάτων της λέξης ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ; (Δεν έχει σημασία αν οι λέξεις που προκύπτουν είναι ορθογραφικά και συντακτικά σωστές).

Λύση:

$$\frac{10!}{\underbrace{1!\dots1!}_{8\text{φορές}}2!2!}$$

Άσκηση:

Οκτώ στρατιώτες θα τοποθετηθούν σε 4 φυλάκια.

α) Αν δεν υπάρχει κανένας περιορισμός, πόσοι τρόποι τοποθέτησης υπάρχουν;

β) Αν σε κάθε φυλάκιο πρέπει να τοποθετηθούν δύο στρατιώτες, πόσοι τρόποι τοποθέτησης υπάρχουν;

Λύση:

α)

Από το παράδειγμα Κυψέλες-Μπάλες, 4^8

β) $\binom{8}{2\,2\,2\,2} = \dfrac{8!}{(2!)^4}$ ή $\binom{8}{2}\cdot\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{2}$